P $= a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$

Input: P và $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$
Output: Min$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\forall a_i \in R, a_i \geq 0; i : 1 \to n$

Gọi $y_i = a_ix_i$
$\Rightarrow a_i = \frac{y_i}{x_i}(x_i \neq 0)$
Giải thích: Nếu tồn tại một $x_i = 0$ thì bài toán giảm số nghiệm từ n xuống (n-1). Vì đề bài cho ta n nghiệm, do đó ta có x_i phải khác không với mọi số nguyên dương i chạy từ 1 đến n để không làm mất bất cứ nghiệm nào của phương trình dẫn đến số nghiệm phải giải khác n.

Giả thiết cho: $a_i \geq 0 \forall a_i \in R$.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số $a_i \geq 0$:
$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} + \cdots + \frac{y_n}{x_n} \geq \sqrt[n]{\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} \cdots \frac{y_n}{x_n}}$
Min$(S) = \sqrt[n]{\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} \cdots \frac{y_n}{x_n}}$

$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_i = \cdots = a_n$
$\Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_i}{x_i} = \cdots = \frac{y_n}{x_n}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:
$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_i}{x_i} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_1+y_2+\cdots+y_i+\cdots+y_n}{x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_n} = \frac{P}{x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_n}$

$\Rightarrow \frac{P}{x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_n}$ luôn phải ≥ 0.

Nếu $\frac{P}{x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_n} < 0$ tất cả các nghiệm $a_i = \frac{y_i}{x_i}$ sẽ < 0. Điều này vi phạm giả thiết, dẫn đến vô nghiệm!

Từ dãy tỉ số đã thiết lập, ta có:
$a_1 = a_2 = \cdots = a_i = \cdots = a_n = \frac{P}{x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_n}$
$S_{min} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_i + \cdots + a_n = n.a_i) = n\frac{P}{x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_n}$

Bài tập minh họa: $20a_1 + 8a_2 + a_3 = 24$
Từ đề bài, ta có:
$P = 24$ và $(x_1, x_2, x_3) = (20, 8, 1)$
Áp dụng công thức đã chứng minh ở trên:
$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{P}{x_1+x_2+x_3} = \frac{24}{20+8+1} = \frac{24}{29}$
$\Rightarrow S = n\frac{P}{x_1+x_2+x_3} = 3\frac{24}{20+8+1} = \frac{72}{29} = 2.482758621$ với $(a_1, a_2, a_3) = (\frac{24}{29}, \frac{24}{29}, \frac{24}{29})$